Filière :	Bâtiment	Durée :	2 heures
Épreuve :	Mathématiques	Coefficient :	10

N.B : Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

Exercice 1 — 5 points

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 12y = -7e^{-4x} \qquad (E)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 pt 1. Résoudre l'équation homogène (H) : $y'' + y' - 12y = 0$.

1 pt 2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x) = xe^{-4x}$ est une solution particulière de (E).

0,5 pt 3. En déduire la solution générale de (E).

4. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)e^{-4x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 pt (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction h définie par : $h(x) = e^{-4x}$.

0,5 pt (b) En déduire que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f est : $f(x) = 1 - 3x + 4x^2 + \circ(x^2)$.

1 pt (c) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 en précisant sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 — 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2y - 2y^2x + 2xy + 1$$

0,5 pt 1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

0,75 pt 2. Vérifier que le couple $(\frac{-1}{3} ; \frac{1}{3})$ est un point critique de f.

0,75 pt 3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

1 pt 4. En déduire la nature de ce point critique de f.

Exercice 3 — 3 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4i\sqrt{3} + 4 = 0 \qquad (E)$$

1 pt 1. Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$.

1 pt 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

1 pt 3. Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

Exercice 4 — 5 points

On considère les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1 pt 1. Etablir que P inversible et vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1 pt 2. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

1 pt 3. Calculer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On considère les suites récurrentes (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 4v_n \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1 pt (a) Donner X_{n+1} en fonction de A et de X_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0$$

1 pt (b) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 — 4 points

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de clients d'une petite entreprise de vente par internet pendant cinq années consécutives à partir de 2018 :

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5
Nombre de clients : y_i	70	160	230	300	400

2 pts 1. Donner les coordonnées du point moyen G et calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.

0,5 pt 2. Peut-on envisager une relation linéaire entre les deux variables x et y ?

1 pt 3. Justifier que l'équation de la droite de régression linéaire de y en x est $y = 80x - 8$.

0,5 pt 4. Estimer le nombre de clients en 2030. (Remarquer que 13 est le rang de l'année 2030)

Fin de l'épreuve